Матричная транспортная задача

Лабораторная работа №3

Постановка задачи. Имеется m пунктов производства определенного вида продукции с заданным объемом производства a_i ,$i = \overline{1,m}$ и n пунктов потребления этой продукции в объемах $b_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$ Известна стоимость перевозки, единицы продукции из i-го пункта производства в j-й пункт потребления – c_{ij}, $i = \overline{1,m}$ $j = \overline{1,n}.$

Требуется найти такой план перевозок $x = (x_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n})$, чтобы продукция со всех пунктов была вывезена

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = \overline{1,m} \tag{1}$$

Запросы всех пунктов потребления были удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \quad j = \overline{1,n} \tag{2}$$

И транспортные расходы были минимальными

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min . \tag{3}$$

Здесь x_{ij} - количество продукции, перевозимое из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Ясно, что

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} \tag{4}$$

Задача (1) - (4) является специальной задачей линейного программирования. Для существования ее решения необходимо и достаточно выполнение условия общего баланса: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (количество производимой продукции равно количеству потребляемой) и в этом случае применим метод потенциалов.

Алгоритм. При решении задач (1) – (4) используют транспортные таблицы с множеством клеток $U = \{(i, j), \quad i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}\}$.

	b_1	b_2	…	b_n	
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	u_1
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	u_2
…	…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	u_m
	v_1	v_2	…	v_n	

1. Построение начального базисного плана перевозок.

Метод минимального элемента. Находим в таблице клетку с минимальной стоимостью перевозки $c_{i_1 j_1} = \min_{(i,j)\in U} c_{ij}$. Полагаем перевозку в этой клетке $\Delta_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$. Если $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ $(x_{i_1 j_1} = b_{j_1})$, то исключаем из дальнейшего рассмотрения строку i_1 (столбец j_1), а число b_{j_1} (число a_{i_1}) заменим на $b_{j_1} - x_{i_1 j}$ (на $a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$). Если $a_{i_1} = b_{j_1}$, то исключаем из рассмотрения либо строку i_1, либо столбец j_1. С уменьшенной таблицей поступаем аналогично. Через $n+m-1$ шагов будут построены перевозки x_{ij}, $(i,j)\in U_Б = \{(i_k, j_k), k=\overline{1,n+m-1}\}$ - базисное множество клеток. Полагаем, $x_{ij}=0, (i,j)\in U_Н = U \setminus U_Б$ - множество небазисных клеток.

2. Решение задачи (1)-(4) методом потенциалов.

1. Находим потенциалы $v_j, j=\overline{1,n}$, $u_i, i=\overline{1,m}$ строк и столбцов транспортной таблицы, решая систему

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (i,j)\in U_Б \tag{5}$$

При решении системы (5), следует один из потенциалов выбирать произвольным. Например, потенциал для строки или столбца, содержащих наибольшее количество базисных клеток, полагать равным нулю.

2. Вычисляем оценки для небазисных клеток

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \qquad (i,j)\in U_Н$$

3. Проверяем критерий оптимальности базисного плана:

а) если $\Delta_{ij} \le 0, \quad \forall (i,j)\in U_Н$, то базисный план перевозок оптимален. Вычисляем на нем транспортные расходы и записываем ответ.

б) если $\exists \Delta_{ij} > 0, (i,j)\in U_Н$, то переходим к п.4.

4. Находим максимальную оценку

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(i,j)\in U_Н} \Delta_{ij}$$

5. Начиная из клетки (i_0, j_0) с использованием клеток $U_Б$ строим цикл.

6. Помечаем клетки цикла знаками “+” и “–” попарно, начиная с клетки (i_0, j_0).

7. Среди перевозок, помеченных знаком “–” выбираем наименьшую $\theta^0 = x_{i^* j^*}$.

8. Строим новую транспортную таблицу с базисным множеством

$$U_Б^{/} = (U_Б \setminus (i^* j^*)) \cup (i^0 j^0)$$

Для нее базисный план получается из предыдущего, если изменить в нем лишь перевозки по циклу следующим образом: к перевозкам в клетках, помеченных знаком “+” прибавляем θ^0, а из перевозок, помеченных знаком “–” вычитаем θ^0. Переходим к п.1.

Замечания.

1. В результате одной итерации транспортные расходы сократятся на величину $\theta^0\ \Delta_{i_0 j_0}$.

2. Если для оптимального базисного плана $\exists x_{i^1 j^1} = 0, (i^1, j^1) \in U_H$, то у задачи существует альтернативный оптимум. Его можно найти, совершив еще одну итерацию, считая $(i^0 j^0) = (i^1, j^1)$.

Пример. Записать математическую модель и решить транспортную задачу методом потенциалов

b_j / a_i	150	170	190	210	180
250	7	9	16	10	16
350	13	12	18	12	30
300	19	15	10	13	13

Решение.

1. Математическая модель данной транспортной задачи имеет вид

Найти план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix}$$

при условиях $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5}$ и ограничениях

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 250 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 350 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 300 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 170 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 190 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 210 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 180 \end{aligned}$$

так, чтобы стоимость перевозок была минимальной:

$$z = 7x_{11} + 9x_{12} + 16x_{13} + 10x_{14} + 16x_{15} + 13x_{21} + 12x_{22} + 18x_{23} + 12x_{24} + 30x_{25} + 19x_{31} + 15x_{32} + $$
$$+ 10x_{33} + 13x_{34} + 13x_{35} -> \min$$

2. Проверяем выполнение условия общего баланса:

250+350+300=900, 150+170+190+210+180=900.

Задача имеет решение.

3. Строим начальный базисный план по методу минимального элемента. Решаем задачу методом потенциалов.

b_j \ a_i	150	170	190	210	180	
250	7 150	− 9 100	16 -2	10 -1	+ 16 1	17
350	13 -3	+ 12 70	18 -1	12 210	− 30 70	20
300	19 -16	15 -10	10 190	13 -8	13 110	13
	-10	-8	-3	-8	0	

Заметим, что $U_Б = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(2,5),(3,3),(3,5)\}, |U_Б| = 7$. Так как $\Delta_{15} = 1 > 0$, то начальный план перевозок не является оптимальным. Для клетки (1,5) строим цикл. Выбираем $\theta^0 = \min(100,70) = 70$ и переходим к новому базисному плану.

7 150	9 30	16 -3	10 -1	16 70	16
13 -3	12 140	18 -2	12 210	30 -1	19
19 -15	15 -9	10 190	13 -7	13 110	13
-9	-7	-3	-7	0	

Так как все оценки $\Delta_{ij} \le 0$, то план перевозок оптимальный.

$$z_{\min} = 7*150 + 9*30 + 16*70 + 12*140 + 12*210 + 10*190 + 13*110 = 8770$$

Ответ.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 150 & 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 140 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 190 & 0 & 110 \end{pmatrix}, \; z_{\min} = 8770.$$

Написать математическую модель и решить транспортную задачу методом потенциалов.

1.

a_i \ b_j	40	20	20	20
25	6	8	14	4
30	5	2	2	8
35	7	6	7	5
10	4	5	12	7

2.

a_i \ b_j	10	40	20	30
10	12	9	14	7
15	11	13	10	8
25	4	2	3	5
50	2	6	13	3

3.

a_i \ b_j	10	40	40	10
15	2	7	8	4
25	3	8	5	1
30	5	10	3	9
30	1	4	4	10

4.

a_i \ b_j	60	65	75	50
70	4	7	15	5
80	7	6	2	3
80	3	4	8	5
20	8	2	4	7

5.

a_i \ b_j	30	70	50	100
70	7	5	1	6
120	5	3	4	9
20	6	8	7	7
40	4	3	5	5

6.

a_i \ b_j	75	125	60	140
80	4	5	2	11
40	7	3	2	4
160	3	4	3	5
120	5	7	9	6

7.

a_i \ b_j	45	40	5	10
30	7	9	9	5
15	2	5	8	9
35	5	6	4	2
20	3	4	3	3

8.

a_i \ b_j	25	35	45	35
50	6	8	2	4
30	7	2	5	4
40	8	1	7	2
20	1	2	8	12

9.

b_j / a_i	60	40	35	65
45	5	4	2	3
30	8	7	5	7
50	4	2	6	8
75	2	5	1	3

10.

b_j / a_i	200	100	80	120
60	6	3	3	8
140	3	2	7	6
150	5	4	2	12
140	2	5	8	7

11.

b_j / a_i	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	8	15	11	21
150	19	16	26	12	20

12.

b_j / a_i	180	140	190	120	170
300	12	21	9	10	16
280	13	15	11	13	21
220	19	26	12	17	22

13.

b_j / a_i	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	16	26	17	20

14.

b_j / a_i	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21

15.

b_j / a_i	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

16.

b_j / a_i	170	120	190	140	180
280	28	12	7	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

17.

b_j / a_i	180	120	90	105	105
150	14	6	4	4	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	15	3

18.

b_j / a_i	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

19.

b_j / a_i	100	70	130	110	90
150	20	3	9	15	35
150	14	10	12	20	46
200	25	11	16	19	48

20.

b_j / a_i	190	140	180	120	170
280	7	3	9	15	35
220	3	10	12	20	46
300	15	11	16	19	48

21.

b_j / a_i	120	180	105	90	105
200	9	6	17	11	8
250	13	4	9	5	7
150	6	7	14	10	6

22.

b_j / a_i	175	225	230	170	200
350	5	13	18	17	8
400	6	10	15	6	3
250	24	21	9	16	17

23.

b_j / a_i	120	110	85	195	190
250	15	7	16	4	11
250	20	9	6	10	9
200	2	4	7	3	6

24.

b_j / a_i	160	120	100	150	170
250	14	11	9	13	18
180	6	5	14	4	14
270	7	19	11	6	13

25.

b_j / a_i	160	160	180	220	280
350	6	11	10	14	19
300	17	6	4	11	9
350	12	8	19	10	13

26.

b_j / a_i	40	30	80	40	20
70	1	3	2	3	1
50	4	7	5	4	2
90	8	2	3	3	3